

École normale supérieure de Cachan

Option P'

6643 Les fonctions considérées ici sont supposées continues de la variable réelle et à valeurs complexes.

PARTIE A.

Si f est une fonction de période $T > 0$, on note $C_n^T(f)$ la quantité égale à

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-(2i\pi/T)nx} dx \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

1° Soit f et g deux fonctions de période $T > 0$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad C_n^T(f) = C_n^T(g).$$

Montrer que $\int_0^T |f(x) - g(x)|^2 dx = 0$ et en déduire que $f = g$.

2° Soit f une fonction de période T telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n^T(f)| < +\infty$

Déduire du 1° que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(f) e^{(2i\pi/T)nx}.$$

On considère maintenant une fonction θ telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel la fonction $x \rightarrow |x|^{1+\alpha} |\theta(x)|$ est bornée.

Soit $T > 0$:

3° Soit $A > 0$. Montrer que pour $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \leq A$ on a

$$|x + nT| \geq |n|T - A.$$

En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la « série » $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x + nT)$ est absolument convergente et définit une fonction continue de la variable x , de période T , qu'on notera θ_G^T et qui s'appelle la T -périodisée de θ .

4° On considère, pour $v \in \mathbb{R}$ fixé, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) e^{-ivx} dx$.

- a) Montrer que cette intégrale est absolument convergente. On notera $\hat{\theta}(v)$ sa valeur.
 b) Montrer que la fonction $\hat{\theta}$ ainsi définie est continue. ($\hat{\theta}$ s'appelle la transformée de Fourier de θ .)
 c) Montrer que $C_n^T(\theta_\sigma^T) = \frac{1}{T} \hat{\theta}(2\pi n/T)$.
 On suppose de plus qu'il existe $\beta > 0$ tel que la fonction $v \rightarrow |v|^{1+\beta} |\hat{\theta}(v)|$ est bornée.

5° Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x+nT) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T) e^{(2i\pi/T)nx}$.

(Ce résultat est appelé la formule de Poisson.)

6° Si A est un réel > 0 , on note $N_T(A) = \{n \in \mathbb{Z}, |2\pi n/T| \leq A\}$.

a) Montrer que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n \in N_T(A)} \hat{\theta}(2\pi n/T) e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi) \int_{-A}^A \hat{\theta}(v) e^{ivx} dv$$

b) Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{T} \sum_{n \in N_T(A)} |\hat{\theta}(2\pi n/T)| \leq c |A - 2\pi|^{-\beta}, \text{ pour } T \geq 1 \text{ et } A > 2\pi.$$

c) Dédurre de a) et b) que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}(2\pi n/T) e^{(2i\pi/T)nx} = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(v) e^{ivx} dv.$$

d) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \theta(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(v) e^{ivx} dv$

(Cette formule s'appelle la formule de réciproité de Fourier.)

PARTIE B.

Les fonctions θ et $\hat{\theta}$ restent soumises aux hypothèses de la partie précédente. On suppose de plus que $\theta(0) = 1$.

On considère une fonction f continue et 2π -périodique. On pose $C_n(f) = C_n^{2\pi}(f)$ ($n \in \mathbb{Z}$).

1° Soit $t > 0$.

a) Montrer que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n(f)| |\theta(nt)| < +\infty$.

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ la « série » $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt)$

définit une fonction continue de la variable x , que l'on notera $\varphi_t(x)$.

2° On pose, pour $t > 0$ et $u \in \mathbb{R}$, $K_t(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inu} \theta(nt)$.

En appliquant la formule de Poisson à la fonction ψ définie par $\psi(x) = e^{i(u/t)x} \theta(x)$ (u et t fixés), montrer que $K_t(u) = \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}((2\pi n - u)/t)$.

On pose $\Phi_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt)$.

3° Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi_t(x) = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} f(x-u) K_t(u) du$.

4° En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \Phi_t(x) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+vt) \hat{\theta}(v) dv$.

5° Montrer que $(1/2\pi) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(v) dv = 1$.

6° En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt) = f(x)$$

et que cette convergence est uniforme en x .

PARTIE C.

La fonction f est toujours une fonction continue 2π -périodique.

Application 1.

Montrer que $\lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} r^{|n|} = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$.

(Procédé de sommation de Poisson)

Application 2.

On pose $\theta(x) = e^{-x^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = (\pi)^{1/2}$.

1° Montrer que $\hat{\theta}$ vérifie une équation différentielle du premier ordre et en déduire $\hat{\theta}$.

2° Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} e^{-n^2 t^2} = f(x)$.

(Procédé de sommation de Weierstrass)

A.1 La formule de Parseval - Bessel permet d'écrire :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n^T(\beta - g)|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |\beta(x) - g(x)|^2 dx$$

Comme $C_n^T(\beta - g) = C_n^T(\beta) - C_n^T(g) = 0$ pour tout n , cela entraîne :

$$\int_0^T |\beta(x) - g(x)|^2 dx = 0$$

La fonction $x \mapsto |\beta(x) - g(x)|^2$ étant continue positive, ceci exige que $\beta - g = 0$ sur $[0, T]$. Enfin, β et g étant périodiques de période T , cela entraîne $\beta = g$ sur tout \mathbb{R} .

A.2

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(\beta) e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$ converge normalement, donc uniformément, vers une fonction continue (comme limite uniforme de fonctions continues) g , puisque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n^T(\beta)| < +\infty$.

Vu la convergence uniforme de la série $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(\beta) e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$, on aura :

$$\begin{aligned} \int_0^T g(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} px} dx &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(\beta) \int_0^T e^{i \frac{2\pi}{T} (n-p)x} dx \\ &= T C_p^T(\beta) \end{aligned}$$

d'où $C_p^T(g) = C_p^T(\beta)$

A.1 s'applique et entraîne :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \beta(x) = g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(\beta) e^{i \frac{2\pi}{T} nx}$$

NB : Ainsi la série de Fourier d'une fonction continue f telle que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n^T(f)| < +\infty$, converge uniformément vers f . Rappelons que le Th. de Dirichlet assure cette convergence uniforme lorsque f est continue et de classe C^1 par morceaux.

A.3

* Si $|n| > \frac{A}{T}$ et $|n| \leq A$, on a :

$$|x + nT| \geq |nT| - |x| \geq |n|T - A$$

* Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{R} \quad |n|^{1+\alpha} |\theta(n)| \leq M$$

Pour $|n| > \frac{A}{T}$ et $|x| \leq A$, on aura :

$$|\theta(x + nT)| \leq \frac{M}{|x + nT|^{1+\alpha}} \leq \frac{M}{(|n|T - A)^{1+\alpha}} \quad (*)$$

La série $\sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ |n| > \frac{A}{T}}} \frac{M}{(|n|T - A)^{1+\alpha}}$ étant convergente, puisque $\frac{2M}{(nT - A)^{1+\alpha}} \sim \frac{2M}{n^{1+\alpha}}$

et $1+\alpha > 1$, (*) montre la convergence uniforme de

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x + nT)$ vers une fonction $\theta_\sigma^T(x)$ sur l'intervalle $[-A, A]$.

θ_σ^T sera continue sur $[-A, A]$ comme limite de fcts continues, et comme $A > 0$ peut-être choisi quelconque, on a prouvé que :

1) $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x + nT)$ converge absolument vers θ_σ^T sur \mathbb{R} ,

2) Cette convergence est uniforme sur tout intervalle $[-A, A]$ où $A \in \mathbb{R}$,

De plus, il est clair que θ_σ^T est T -périodique.

A.4.a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{-1} \frac{M}{|x|^{1+\alpha}} dx + \int_{-1}^1 |\theta(x)| dx + \int_1^{+\infty} \frac{M}{|x|^{1+\alpha}} dx$$

La convergence de $\int |\theta(x)| dx$ se déduit de celles des 2 intégrales généralisées du membre de droite, par ailleurs assurées puisque $1+\alpha > 1$.

On peut poser :

$$\forall v \in \mathbb{R} \quad \hat{\theta}(v) = \int_{\mathbb{R}} \theta(x) e^{-ivx} dx$$

(avec une intégrale absolument convergente au second membre).

A.4.b

1^{re} solution :

$$\begin{aligned} * \text{ Idée : } |\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| &= \left| \int \theta(x) (e^{-ivx} - e^{-iwx}) dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| \underbrace{|e^{-ivx} - e^{-iwx}|}_{= |1 - e^{i(v-w)x}| = |e^{-i\frac{v-w}{2}x} - e^{i\frac{v-w}{2}x}|} dx \quad (*) \\ &= 2 \left| \sin\left(\frac{v-w}{2}x\right) \right| \end{aligned}$$

* $\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| dx$ converge, donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $A > 0$ tq

$$\int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)| dx + \int_A^{+\infty} |\theta(x)| dx \leq \frac{\varepsilon}{4}$$

(*) permet d'écrire :

$$\begin{aligned} |\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| &= \int_{-\infty}^{+\infty} |\theta(x)| \cdot 2 \left| \sin\left(\frac{v-w}{2}x\right) \right| dx \\ &= \int_{-\infty}^{-A} + \int_{-A}^A + \int_A^{+\infty} \leq 2 \int_{-\infty}^{-A} |\theta| dx + 2 \int_{-A}^A |\theta| \left| \sin\frac{v-w}{2}x \right| dx + 2 \int_A^{+\infty} |\theta| dx \end{aligned}$$

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2 \int_{-A}^A |\theta(x)| \left| \sin\left(\frac{v-w}{2}x\right) \right| dx$$

θ est continue et vérifie $|\theta(x)| \leq \frac{M}{|x|^{1+\alpha}}$ pour tout $x \neq 0$, donc $C\theta \doteq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\theta(x)|$ existe, et comme $\left| \sin\left(\frac{v-w}{2}x\right) \right| \leq \left| \frac{v-w}{2}x \right|$, on obtient :

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + C\theta \int_{-A}^A |v-w| |x| dx$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2A^2 C\theta \cdot |v-w|$$

$\leq \varepsilon$ pour $|v-w|$ suffisamment petit.

Q.F.D.

2^e solution : $\hat{\theta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) e^{-ivx} dx$

Pour $A > 0$ fixé, $\hat{\theta}_A(v) \doteq \int_{-A}^A \theta(x) e^{-ivx} dx$ est une fonction continue en v . En effet, l'application :

$$\begin{aligned} [-A, A] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, v) &\longmapsto \theta(x) e^{-ivx} \end{aligned}$$

est continue et un Th. du Cours permet de conclure.

On a :

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)| \leq \int_{-\infty}^{-A} |\theta(x)| dx + \int_A^{+\infty} |\theta(x)| dx \quad (*)$$

et $\int_{-\infty}^{+\infty} |\theta|$ convergent, il existe A tq le second membre de (*)

soit $\leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $v \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\exists A \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad |\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)| \leq \varepsilon/3$$

La continuité de $\hat{\theta}$ sur \mathbb{R} s'en déduit. En effet, si v et $w \in \mathbb{R}$,

$$|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}(w)| \leq \underbrace{|\hat{\theta}(v) - \hat{\theta}_A(v)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|\hat{\theta}_A(v) - \hat{\theta}_A(w)|}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{|\hat{\theta}_A(w) - \hat{\theta}(w)|}_{\leq \varepsilon/3}$$

si A suffisamment grand si $|v-w| < \eta$ si A suff. grand

NB: Autre façon de conclure à partir de (*): (*) montre que $\hat{\theta}$ est la limite uniforme de la famille de fonctions continues $\hat{\theta}_A$ quand A tend vers $+\infty$. Donc $\hat{\theta}$ sera continue comme limite uniforme de fonctions continues!

A.4.c

$$C_n^T(\theta_\sigma^T) \doteq \frac{1}{T} \int_0^T \theta_\sigma^T(x) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(x+kT) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx$$

La série convergeant uniformément sur $[0, T]$ d'après A.3, on peut écrire :

$$C_n^T(\theta_\sigma^T) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^T \theta(x+kT) e^{-i \frac{2\pi}{T} nx} dx$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kT}^{(k+1)T} \theta(y) e^{-i \frac{2\pi}{T} ny} dy$$

$$= \frac{1}{T} \int_{\mathbb{R}} \theta(y) e^{-i \frac{2\pi}{T} ny} dy$$

$$= \frac{1}{T} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T} n\right)$$

A.5

On a $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x+nT) \doteq \theta_\sigma^T(x)$, donc tout consiste à montrer :

$$\theta_\sigma^T(x) = \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$$

soit encore $\theta_\sigma^T(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n^T(\theta_\sigma^T) e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$ d'après A.4.c

Cette dernière égalité est vérifiée car θ_σ^T est T -périodique et car $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |C_n^T(\theta_\sigma^T)| < +\infty$ (voir lemme ci-dessous), ce qui nous permet d'utiliser A.2. CQFD

|| Lemme : $\sum |C_n^T(\theta_\sigma^T)| < +\infty$

preuve : En notant $K = \sup_{v \in \mathbb{R}} |v|^{1+\beta} |\hat{\theta}(v)|$, on a :

$$|C_n^T(\theta_\sigma^T)| = \frac{1}{T} \left| \hat{\theta}\left(\frac{2\pi}{T}n\right) \right| \leq \frac{1}{T} \cdot \frac{K}{\left(\frac{2\pi}{T}n\right)^{1+\beta}} = \frac{KT^\beta}{(2\pi)^{1+\beta}} \cdot \frac{1}{|n|^{1+\beta}}$$

et $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|n|^{1+\beta}}$ converge (puisque $1+\beta > 1$).

CQFD

A.6.a Soit $N_T = E\left(\frac{AT}{2\pi}\right)$. Posons $f(t) = \hat{\theta}(2\pi t) e^{i2\pi t x}$ et :

$$S_T \doteq \frac{1}{T} \sum_{n \in N_T(A)} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i\frac{2\pi n x}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n=-N_T}^{N_T} f\left(\frac{n}{T}\right)$$

$$\text{Comme } \int_{-A}^A \hat{\theta}(v) e^{ivx} dv = 2\pi \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} \hat{\theta}(2\pi t) e^{i2\pi t x} dt = 2\pi \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t) dt,$$

il suffira de prouver les 2 résultats suivants pour conclure :

$$\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{1} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} S_T = \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \\ \textcircled{2} \quad \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt = \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t) dt \end{array} \right.$$

$\textcircled{2}$ est trivial car $\lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{N_T}{T} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\left(\frac{AT}{2\pi}\right) = \frac{A}{2\pi}$ entraîne

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt = \int_{-\frac{A}{2\pi}}^{\frac{A}{2\pi}} f(t) dt$$

Montrons $\textcircled{1}$:

$$\begin{aligned} S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt &= \frac{1}{T} \sum_{n=-N_T}^{N_T} f\left(\frac{n}{T}\right) - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \cdot f\left(\frac{N_T}{T}\right) + \sum_{n=-N_T}^{N_T-1} \left[\frac{1}{T} f\left(\frac{n}{T}\right) - \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} f(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} f\left(\frac{N_T}{T}\right) + \sum_{n=-N_T}^{N_T-1} \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} \left| f\left(\frac{n}{T}\right) - f(t) \right| dt \quad (*) \end{aligned}$$

donc

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{T} \left| f\left(\frac{N_T}{T}\right) \right| + \sum_{n=-N_T}^{N_T-1} \int_{\frac{n}{T}}^{\frac{n+1}{T}} \left| f\left(\frac{n}{T}\right) - f(t) \right| dt$$

f est continue sur $[-A, A]$, donc uniformément continue, et :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \quad \left. \begin{array}{l} |t - t'| < \eta \\ t, t' \in [-A, A] \end{array} \right\} \Rightarrow |f(t) - f(t')| < \varepsilon$$

Si $\frac{1}{T} < \eta$, l'inégalité ci-dessus entraîne :

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{T} \left| f\left(\frac{N_T}{T}\right) \right| + \frac{2N_T}{T} \varepsilon$$

$$0 \leq \frac{N_T}{T} = \frac{1}{T} E\left(\frac{AT}{2\pi}\right) < \frac{A}{2\pi}, \text{ donc en notant } K = \max_{t \in [-A, A]} f(t),$$

on obtient :

$$\left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \right| \leq \frac{K}{T} + \frac{A}{\pi} \cdot \varepsilon$$

dès que $T > \frac{1}{\eta}$.

Ce qui prouve (1)

(Vraiment : si $\varepsilon' > 0$ est donné, il suffit de prendre $\varepsilon = \frac{\pi \varepsilon'}{2A}$, de construire η , et de choisir $T_0 > \frac{1}{\eta}$ suffisamment grand pour que $\frac{K}{T_0} < \frac{\varepsilon'}{2}$ pour être assuré (vu (x)) d'avoir :

$$T > T_0 \Rightarrow \left| S_T - \int_{-\frac{N_T}{T}}^{\frac{N_T}{T}} f(t) dt \right| < \varepsilon' \quad)$$

A.6.b

Notons $N_T = E\left(\frac{AT}{2\pi}\right)$. On a $N_T(A) = \mathbb{Z} \cap [-N_T, N_T]$.

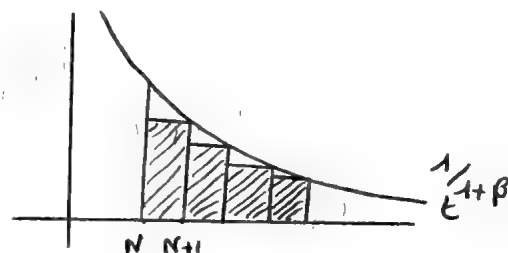
$$\frac{1}{T} \sum_{n \notin N_T(A)} \left| \hat{O}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \right| \leq \frac{1}{T} \sum \frac{S}{\left|\frac{2\pi n}{T}\right|^{1+\beta}} \quad \text{où } S \text{ est une cte}$$

$$\leq S' T^\beta \sum_{n \notin N_T(A)} \frac{1}{|n|^{1+\beta}}$$

|| lemme: $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} = O\left(\frac{1}{N^\beta}\right) \quad (\text{ou } \beta > 0)$

preuve: comparaison avec l'intégrale

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}} dt = \frac{1}{\beta N^\beta}$$



NB: en fait, cette comparaison avec l'intégrale est encore plus fructueuse car nous permet d'écrire

$$\int_{N+1}^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}} dt \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\beta}} \doteq S(N) \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{t^{1+\beta}} dt$$

$$\frac{1}{\beta(N+1)^\beta} \leq S(N) \leq \frac{1}{\beta N^\beta}$$

$$\frac{N^\beta}{(N+1)^\beta} \leq \frac{S(N)}{\frac{1}{\beta N^\beta}} \leq 1$$

$\rightarrow 1 \quad (N \rightarrow +\infty)$

et prouve que $S(N) \sim \frac{1}{\beta N^\beta} \quad (N \rightarrow +\infty)$

CQFD

On déduit

$$\frac{1}{T} \sum_{n \notin N_T(A)} \left| \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \right| \leq S'' \frac{T^\beta}{N_T^\beta} = S'' \left(\frac{N_T}{T}\right)^{-\beta} \quad (*)$$

$$\text{mais } N_T \leq \frac{AT}{2\pi} < N_T + 1 \Rightarrow \frac{N_T}{T} \leq \frac{A}{2\pi} < \frac{N_T}{T} + \frac{1}{T} \leq \frac{N_T}{T} + 1$$

car $T \geq 1$. Par suite
 $\left\{ \begin{array}{l} T \geq 1 \\ A > 2\pi \end{array} \right.$

$$\frac{A}{2\pi} - 1 \leq \frac{N_T}{T} \Rightarrow \left(\frac{N_T}{T}\right)^{-\beta} \leq \left(\frac{A}{2\pi} - 1\right)^{-\beta}$$

et (*) implique l'existence de $c > 0$ tel que

$$\frac{1}{T} \sum_{n \notin N_T(A)} \left| \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \right| \leq c |A - 2\pi|^{-\beta}$$

CQFD

A.6. c

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{T} \sum_{n \notin N_T(A)} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{T}\right) e^{i \frac{2\pi n x}{T}} - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v) e^{i v x} dv \right| \\ & \quad \doteq S \\ & \leq \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n \notin N_T(A)} |S|}_{\doteq S_1} + \underbrace{\left| \frac{1}{T} \sum_{n \in N_T(A)} S - \frac{1}{2T} \int_{-A}^A \hat{\theta}(v) e^{i v x} dv \right|}_{\doteq S_2} + \underbrace{\int_{-\infty}^{-A} |\hat{\theta}(v)| dv + \int_A^{+\infty} |\hat{\theta}(v)| dv}_{\doteq S_3} \end{aligned} \quad (*)$$

Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $A > 2\pi$ et $T > 1$.

A.6. b entraîne $S_1 \leq c |A - 2\pi|^{-\beta}$, et comme $\lim_{A \rightarrow +\infty} |A - 2\pi|^{-\beta} = 0$, il existe A_0 tel que $A > A_0 \Rightarrow c |A - 2\pi|^{-\beta} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

A.6. a entraîne l'existence de T_0 / $T > T_0 \Rightarrow S_2 \leq \frac{\varepsilon}{3}$

Enfin $\int_{\mathbb{R}} |\hat{\theta}(v)| dv$ converge (A.4. a) donc $S_3 \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $A \geq A_1$.

Finalement, pour $A > \sup(2\pi, A_0, A_1)$ et $T > \sup(1, T_0)$, le 1^{er} membre de (*) est $\leq \varepsilon$.
 CQFD

A.6.d

Compte tenu de A.6.c et A.5, tout revient à prouver que :

$$\theta(x) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(x+nT)$$

ou encore $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \theta(x+nT) = 0$ (*)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |\theta(x+nT)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{|x+nT|^{1+\alpha}} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K}{(nT-|x|)^{1+\alpha}} \end{aligned}$$

Pour $T > 2|x|$, on a $nT - |x| > nT - \frac{T}{2}$ donc :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) \right| &\leq K \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(nT - \frac{T}{2}\right)^{1+\alpha}} = \underbrace{\frac{K}{T^{1+\alpha}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^{1+\alpha}}}_{\rightarrow 0 \quad (T \rightarrow +\infty)} \end{aligned}$$

Cela prouve que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \theta(x+nT) = 0$. On prouverait de même que $\lim_{T \rightarrow +\infty} \sum_{n=-1}^{-\infty} \theta(x+nT) = 0$, ce qui achève la démonstration de (*).

NB :

1) La formule de réciprocity de Fourier est, en fait, valable dans des conditions plus générales. Elle est vraie dès que $\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\theta}(w)| dw$ converge, par exemple.

2) La formule de réciprocity s'écrit aussi $\hat{\hat{\theta}}(x) = \theta(-x)$

B.1.a

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \text{ donc :}$$

$$|C_n(f)| |\theta(nt)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt \cdot \frac{K}{|nt|^{1+\alpha}} \quad (\text{où } K \text{ est une cte})$$

f étant continue et périodique sur \mathbb{R} , elle atteint son maximum

$S = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ sur \mathbb{R} , et :

$$|C_n(f)| |\theta(nt)| \leq \frac{SK}{t^{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{|n|^{1+\alpha}}$$

Comme $\sum_{n \in \mathbb{Z}^*} \frac{1}{|n|^{1+\alpha}}$ converge, la série $\sum |C_n(f)| |\theta(nt)|$ sera convergente.

B.1.b

La série $P_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} C_n(f) e^{inx} \theta(nt)$ est uniformément convergente

d'après B.1.a, puisque $|C_n(f) e^{inx} \theta(nt)| \leq |C_n(f)| \theta(nt)$. $P_t(x)$ est donc la limite uniforme d'une suite de fonctions $x \mapsto C_n(f) e^{inx} \theta(nt)$ continues sur \mathbb{R} , donc sera continue sur \mathbb{R} .

B.2

Appliquons la formule de Poisson (*) à $\Psi(x) = e^{i \frac{u}{t} x} \theta(x)$ et pour $T=t$ et $x=0$.
On obtient :

$$K_t(u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inu} \theta(nt) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Psi(nt) = \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\Psi}\left(\frac{2\pi n}{t}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Calculons } \hat{\Psi}\left(\frac{2\pi n}{t}\right) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \Psi(v) e^{-iv \frac{2\pi n}{t}} dv \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(v) e^{-iv \left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{n}{t}\right)} dv \\
 &= \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{n}{t}\right)
 \end{aligned}$$

donc
$$\boxed{\Psi_t(n) = \frac{1}{t} \sum \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n}{t} - \frac{n}{t}\right)}$$

(a) Vérifions que Ψ satisfait les 2 conditions faites sur θ dans la partie A :

$\Psi(n) = e^{i \frac{n}{t}} \theta(n)$ donc $|n|^{1+\alpha} |\Psi(n)| = |n|^{1+\alpha} |\theta(n)|$ on a bien par hypothèse

$$\hat{\Psi}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i \frac{n}{t} y} \theta(y) e^{-iy n} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(y) e^{-iy \left(n - \frac{n}{t}\right)} dy = \hat{\theta}\left(n - \frac{n}{t}\right)$$

donc

$$|n|^{1+\alpha} |\hat{\Psi}(n)| = |n|^{1+\alpha} |\hat{\theta}\left(n - \frac{n}{t}\right)| \leq |n|^{1+\alpha} \cdot \frac{M}{\left|n - \frac{n}{t}\right|^{1+\alpha}}$$

pour $n \neq \frac{n}{t}$, on a par hypothèse on a $\hat{\theta}$.

$n \mapsto |n|^{1+\alpha} |\hat{\Psi}(n)|$ est donc bornée quand $n \rightarrow \pm \infty$, continue sur \mathbb{R} , et est bien bornée sur tout \mathbb{R} .

OK

et : on a utilisé (et redémontré) 2 fois la formule

$$\widehat{e^{i \cdot \frac{n}{t}} \cdot \theta(n)} = \hat{\theta}\left(n - \frac{n}{t}\right)$$

B.3

$$J \doteq \int_0^{2\pi} \beta(x-u) K_t(u) du = \int_0^{2\pi} \beta(x-u) \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inu} \theta(nt) du$$

La série $\sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{inu} \theta(nt) \beta(x-u)$ est normalement convergente

puisque $u \mapsto \beta(x-u)$ est continue, donc $|\beta(x-u)|$ est bornée sur $[0, 2\pi]$, et puisque $|\theta(nt)| \leq \frac{Ct^\alpha}{|nt|^{1+\alpha}}$ par hypothèse.

Ainsi :

$$\begin{aligned} J &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(nt) \int_0^{2\pi} e^{inu} \underbrace{\beta(x-u)}_v du \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(nt) \int_x^{x-2\pi} e^{in(x-v)} \beta(v) (-dv) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(nt) e^{inx} \int_0^{2\pi} \beta(v) e^{-inv} dv \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta(nt) e^{inx} : 2\pi c_n(\beta) \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta(x-u) K_t(u) du = \overline{\Phi}_t(x)$$

B.4 On a (B.2) :

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{t} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u) du \quad (*)$$

Si $u \in [0, 2\pi]$, on a :

$$\left| \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u) \right| \leq \frac{K \cdot t^{1+\beta}}{(2\pi n - u)^{1+\beta}} \sup_{u \in [0, 2\pi]} |x-u| \leq \frac{K t^{1+\beta}}{(2\pi n - 2\pi)^{1+\beta}} \sup_{u \in [0, 2\pi]} |x-u|$$

et cette dernière série converge.

La série figurant en (*) converge donc normalement et l'on peut intervertir $\int_0^{2\pi}$ et $\sum_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$\Phi_t(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_0^{2\pi} \hat{\theta}\left(\frac{2\pi n - u}{t}\right) f(x-u) du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{t} \int_{2\pi n}^{2\pi(n-1)} \hat{\theta}\left(\frac{v}{t}\right) f(x+v) (-dv)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}\left(\frac{v}{t}\right) f(x+v) dv$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(w) f(x+wt) dw$$

B.5 La formule de réciprocity de Fourier (A.6.d) donne

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v) dv = \theta(0) = 1$$

B.6 D'après B.4 et B.5 :

$$\Phi_t(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(x+vt) - f(x)) \hat{\theta}(v) dv$$

$\int_{\mathbb{R}} \hat{\theta}(v) dv$ converge. Soit $\varepsilon > 0$, il existe A tq

$$\int_{-\infty}^A |\hat{\theta}(v)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_A^{+\infty} |\hat{\theta}(v)| < \varepsilon$$

f est périodique et continue, donc uniformément continue sur \mathbb{R} .

Elle est bornée sur \mathbb{R} . Notons $M = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$.

$$\begin{aligned} |\Phi_t(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{-A} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A + \frac{1}{2\pi} \int_A^{+\infty} \\ &\leq \frac{\varepsilon M}{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-A}^A |f(x+vt) - f(x)| \hat{\theta}(v) dv + \frac{\varepsilon M}{\pi} \quad (*) \end{aligned}$$

L'uniforme continuité de f permet d'écrire :

$$\exists \eta \quad |x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{A}$$

donc

$$|vt| < \eta \Rightarrow |f(x+vt) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{A}$$

Si $v \in [-A, A]$, $|vt| \leq A|t|$ sera $< \eta$ dès que $t < \frac{\eta}{A}$,

et donc :

$$t < \frac{\eta}{A} \Rightarrow |f(x+vt) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{A}$$

(*) entraîne alors :

$$|\Phi_t(x) - f(x)| \leq \frac{2M}{\pi} \varepsilon + \frac{1}{2\pi} \cdot 2A \cdot C \cdot \frac{\varepsilon}{A} \quad \text{où } C = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\hat{\theta}(x)|$$

sait :

$$t < \frac{\eta}{A} \Rightarrow |\bar{\Phi}_t(x) - f(x)| \leq \left(\frac{2M}{\pi} + \frac{C}{\pi} \right) \varepsilon$$

ce qui prouve $\lim_{t \rightarrow 0_+} \bar{\Phi}_t(x) = f(x)$ avec une convergence uniforme

en x (car η ne dépend pas de x mais seulement de f et de ε)

C. Application 1

On applique B.6 avec $\theta(t) = e^{-|t|}$, en notant :

$$\theta(nt) = e^{-|nt|} = (e^{-t})^{|n|} = r^{|n|}$$

si $r = e^{-t}$, On a bien $\lim_{t \rightarrow 0_+} r = 1_-$.

Vérifions que θ satisfait les conditions du A. :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \theta(t) |t|^{1+\alpha} = 0 \text{ pour tout } \alpha > 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part } \hat{\theta}(v) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-|t|} e^{-itv} dt = \int_{-\infty}^0 e^t e^{-itv} dt + \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-itv} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{itv} dt + \int_0^{\infty} e^{-t} e^{-itv} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} 2 \cos vt \, dt \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-itv} dt \right) \\ &= 2 \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1+iv} \right) = \frac{1}{1+v^2} \end{aligned}$$

preuve que $v \mapsto |v|^2 \hat{\theta}(v)$ est bornée. C.F.D

Application 2 :

C.1

$\theta(x) = e^{-x^2}$. Alors $|x|^{1+\alpha} e^{-x^2}$ est bornée pour tout $\alpha > 0$, et :

$$\hat{\theta}(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{-ivx} dx$$

* Supposons que nous puissions dériver sous le signe somme :

$$\hat{\theta}'(v) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-ivx} dx$$

Par intégration par parties :

$$\hat{\theta}'(v) = -i \left(\left[\frac{e^{-x^2}}{-2} \cdot e^{-ivx} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{-2} \cdot (-iv) e^{-ivx} dx \right)$$

$$\hat{\theta}'(v) = -\frac{v}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-ivx} dx$$

$$\hat{\theta}'(v) = -\frac{v}{2} \hat{\theta}(v)$$

et $\hat{\theta}$ vérifie l'équation différentielle $y' = -\frac{t}{2} y$ que l'on résout en séparant les variables :

$$\frac{1}{y} dy = -\frac{t}{2} dt$$

$$\ln(y) = -\frac{t^2}{4} + \text{cte}$$

$$y = a e^{-\frac{t^2}{4}}$$

$$\hat{\theta}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad , \quad \text{donc}$$

$$\hat{\theta}(v) = \sqrt{\pi} \cdot e^{-\frac{v^2}{4}}$$

* Montrons que l'on peut dériver $\hat{f}(s)$ sous le signe \int :

Solution : on utilise le Th. de dérivabilité de l'intégrale
impropre $\int_a^b f(x,t) dt$ (Rama II.2.3)

Rappel :

Th : $F(x) = \int_a^{+\infty} f(x,t) dt \quad x \in I$, I intervalle de \mathbb{R} .

Si 1) $f(x,t)$ continue en (x,t)

2) $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe et est continue en (x,t)

3) $\int_a^{+\infty} f(x,t) dt$ est simplement convergente (la moindre des choses!)

4) $\int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$ est uniformément convergente

Alors $F(x)$ est dérivable sur I et $F'(x) = \int_a^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) dt$.

Soi $\hat{f}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{-i\omega t} dt$. Les points 1), 2), 3) sont
trivialement vérifiés, et nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} e^{-i\omega t}) = -te^{-st} e^{-i\omega t}$$

$$\text{Donc } \left| \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} e^{-i\omega t}) \right| \leq te^{-st} \text{ avec } \int_0^{+\infty} te^{-st} dt \text{ qui}$$

converge

d'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial s}(e^{-st} e^{-i\omega t}) dt$ est donc normalement convergente,

donc aussi uniformément convergente. CQFD

Résolution : on se ramène au Théorèmes plus classiques concernant la dérivation de $x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ où $[a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} .

On a
$$\hat{\theta}(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-ivx} dx$$

Posons
$$F_n(v) = \int_{-n}^n e^{-x^2} e^{-ivx} dx$$

L'application $(v, x) \mapsto e^{-x^2} e^{-ivx}$ étant de classe C^1 , le Théorème classique de dérivation des fonctions exprimées à l'aide d'une intégrale prouve que F_n est de classe C^1 et

$$F_n'(v) = \int_{-n}^n \frac{\partial}{\partial v} (e^{-x^2} e^{-ivx}) dx$$

$$F_n'(v) = -i \int_{-n}^n x e^{-x^2} e^{-ivx} dx$$

Si l'on calcule :

$$\left| F_n'(v) + i \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} e^{-ivx} dx \right| \leq 2 \int_n^{+\infty} x e^{-x^2} dx$$

et le 2^e membre tend vers 0 indépendamment de v quand $n \rightarrow +\infty$. Ainsi, la suite $(F_n'(v))_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers

la fonction $v \mapsto \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-ivx} dx$, et le Théorème de dérivation

de la limite d'une suite de fonctions prouve que $\hat{\theta} = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n$ est de classe C^1 et $\hat{\theta}'(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n'(v) = -i \int_{\mathbb{R}} x e^{-x^2} e^{-ivx} dx$.

C.2 On applique B.6 :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) e^{inx} e^{-n^2 t^2} = f(x).$$

FIN